Réduction : que les définitions

E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une matrice

Définition. Soient F un sev de E et $f \in \mathscr{L}(E)$.

F stable par $f \Leftrightarrow f(F) \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E,\ (x \in F \Rightarrow f(x) \in F)$.
F pas stable par $f \Leftrightarrow f(F) \not\subset F \Leftrightarrow \exists x \in E,\ (x \in F$ et $f(x) \notin F)$.

Sommes de plusieurs sous-espaces, sommes directes

Définition. La somme des sous-espaces $F_1, \ldots, F_p$ est l'ensemble des sommes d'un vecteur de F_1, d'un vecteur de F_2 ... et d'un vecteur de F_p ou encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k = F_1 + \ldots + F_p = \{x_1 + \ldots + x_p,\ (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p\}$.

Définition. La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe

$\Leftrightarrow$ tout vecteur x de cette somme peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_p$ où $x_1 \in F_1, \ldots, x_p \in F_p$

$\Leftrightarrow \forall \left((x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}, (x_i')_{1\leqslant i\leqslant p}\right) \in \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{p} F_i\right)^2,\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} x_i' \Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i = x_i'\right)$

$\Leftrightarrow$ $\begin{array}{ccc} \displaystyle\prod_{i=1}^{p} F_i & \to & E \\ (x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i \end{array}$ est injective.

Dans ce cas, la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ se note $F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$ ou aussi $\displaystyle\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} F_i$.

Définition. Les sous-espaces $F_1, \ldots, F_p$ sont **supplémentaires** dans E si et seulement si $\displaystyle\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} F_i = E$.

Il revient au même de dire que les sous-espaces $F_1, \ldots, F_p$ sont supplémentaires dans E si et seulement si tout vecteur x de E peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_p$ où $x_1 \in F_1, \ldots, x_p \in F_p$ ou encore si et seulement si l'application $\begin{array}{ccc} \displaystyle\prod_{i=1}^{p} F_i & \to & E \\ (x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i \end{array}$ est un isomorphisme.

Quand la somme $E = \displaystyle\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} F_i$, on dit alors que la base $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition $E = \displaystyle\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} F_i$.

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul puis f un endomorphisme de E.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est une valeur propre de f si et seulement si $\exists x \in E \setminus \{0\}/\ f(x) = \lambda x$.
- Soit $x \in E$. x est un vecteur propre de f si et seulement si $x \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}/\ f(x) = \lambda x$.

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est une valeur propre de A si et seulement si $\exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}/\ AX = \lambda X$.
- Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. X est un vecteur propre de A si et seulement si $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}/\ AX = \lambda X$.

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le spectre de A est l'ensemble de ses valeurs propres.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Le spectre de f est l'ensemble de ses valeurs propres.

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ est $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda Id_E)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A. Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda Id_n)$.

Endomorphismes ou matrices diagonalisables

Définition. Si E un espace non nul de dimension quelconque et $f \in \mathscr{L}(E)$, f est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.
Si E un espace non nul de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, f est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, A est diagonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale.

Polynôme caractéristique

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Le **polynôme caractéristique** de la matrice A est $\chi_A = \det(XI_n - A)$ (ou $P_A = \det(XI_n - A)$).
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Si $\dim(E) < +\infty$, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f est $\chi_f = \det(XId_E - f)$ (ou $P_f = \det(XId_E - f)$).

Définition. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ puis $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A.
L'**ordre de multiplicité** de la valeur propre λ est son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de A.

Si λ est racine simple de χ_A, on dit que λ est valeur propre simple de A.
Si λ est racine double de χ_A, on dit que λ est valeur propre double de A ...
Si λ est racine d'ordre au moins égal à 2 de χ_A, on dit que λ est valeur propre multiple de A.

Définition. Le spectre d'une matrice ou d'un endomorphisme désigne aussi la famille des valeurs propres $(\lambda_, \dots, \lambda_n)$ où chaque valeur propre est écrite un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. On doit toujours préciser si la notation $\mathrm{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres ou la famille des valeurs propres.

Endomorphismes ou matrices trigonalisables

Définition.

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis f un endomorphisme de E.
f est trigonalisable (ou triangulable) si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est trigonalisable (ou triangulable) si et seulement si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Polynômes d'endomorphismes, polynômes de matrices

L'algèbre des polynômes en f (ou en A)

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ puis $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. L'endomorphisme $P(f)$ est $P(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k = a_0 Id_E + a_1 f + \ldots + a_p f^p$.

De même, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice $P(A)$ est $P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_p A^p$.

On note $\mathbb{K}[f]$ (resp. $\mathbb{K}[A]$) l'ensemble des $P(f)$ (resp. $P(A)$) où P est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

Commutant d'un endomorphisme ou d'une matrice

Définition.

- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis f un endomorphisme de E. Le **commutant** de f, noté $C(f)$, est l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f. $C(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) / \ g \circ f = f \circ g\}$.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le **commutant** de A est l'ensemble des matrices carrées qui commutent avec A. $C(A) = \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) / \ B \times A = A \times B\}$.

Polynôme minimal d'un endomorphisme (ou d'une matrice)

Définition.

• Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie puis f un endomorphisme de E. L'unique polynôme unitaire P_0 tel que $\text{Ker}\,(\varphi_f) = P_0 \times \mathbb{K}[X]$ s'appelle le **polynôme minimal** de f et se note μ_f (ou Q_f).

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.L'unique polynôme unitaire P_0 tel que $\text{Ker}\,(\varphi_A) = P_0 \times \mathbb{K}[X]$ s'appelle le **polynôme minimal** de A et se note μ_A (ou Q_A).